

О ВЕРОЯТНОСТЯХ ОШИБОК В ОДНОЙ МОДЕЛИ ВЫЧИСЛЕНИЙ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Многозначная логика предоставляет широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях и с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Этим объясняется интерес к различным моделям вычислений, среди которых важное место занимают схемы из функциональных элементов. В этой работе продолжается исследование ненадежности схем, реализующих функции k -значной логики ($k \geq 3$), а ее цель – выявить свойства подсхем, вероятности ошибок которых определяют нижнюю оценку ненадежности всей схемы.

Материалы и методы. В работе используются известные методы дискретной математики и математической кибернетики для получения оценок ненадежности схемы и для оценки числа функций специального вида.

Результаты. Для произвольного $k \geq 3$ найдены подсхемы, по вероятностям ошибок которых можно оценить ненадежность всей схемы, причем существенно расширен класс функций, реализуемых этими подсхемами. Расширен ранее известный класс таких функций четырехзначной логики, что для любой схемы, реализующей функцию этого класса, выполняется нижняя оценка ненадежности в базисе Россера – Туркетта.

Выводы. Вероятности ошибок некоторых подсхем определяют нижнюю оценку ненадежности всей схемы.

Ключевые слова: функции k -значной логики, ненадежные функциональные элементы, синтез схем из ненадежных элементов.

М. А. Alekhina

ON ERROR PROBABILITY IN ONE MODEL OF COMPUTATION

Abstract.

Background. Multivalued logic offers ample opportunities for development of various algorithms in many fields. It is successfully applied for solution of many problems and in many technical developments. These facts explain an interest to various models of computation, including circuits compiled of functional gates. The present work continues researching unreliability of circuits realizing functions of k -meaning logic ($k \geq 3$); the aim of the work is to reveal properties of sub-circuits, error probability of which determines the lower value of unreliability of the whole circuit.

Materials and methods. The study was based on the well-known methods of discrete mathematics and mathematical cybernetics that provided values of circuit unreliability and allowed to assess a number of functions of special type.

Results. For a random $k \geq 3$ the author has found sub-circuits, the error probability of which enables to assess reliability of the whole circuit, while the class of functions, realized by the said sub-circuits, has been significantly expanded. The previ-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 14-01-00273а).

ously known class of such functions of four valued logic has been expanded in such a manner that any circuit, realizing the function of this class, holds the lower value of reliability in the Rosser-Turkett basis.

Conclusions. Error probability of some unreliable sub-circuits determines the lower value of unreliability of the whole system.

Key words: k -meaning logics functions, unreliable functional gates, synthesis of circuits composed of unreliable gates.

Введение

В современной технике и математике в подавляющем большинстве случаев используется двузначная логика. Основные модельные объекты, работающие на основе двузначной логики (например, схемы из ненадежных элементов [1–3], неветвящиеся программы [4]) на данный момент являются достаточно хорошо изученными. Многозначная логика предоставляет более широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Этим объясняется интерес к различным моделям вычислений, среди которых важное место занимают схемы из функциональных элементов. В этой работе продолжается исследование ненадежности схем, реализующих функции k -значной логики ($k \geq 3$).

В работе [5] описаны функции k -значной логики, схемы которых можно использовать для повышения надежности исходных схем, а в [6, 7] построены асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе Россера – Туркетта при $k = 3$ и 4 соответственно. При синтезе асимптотически оптимальных по надежности схем возникает задача получения верхних и нижних оценок ненадежности схем, реализующих функции k -значной логики ($k \geq 3$).

Цель этой статьи – выявить свойства подсхем надежных схем, с помощью которых можно получить нижнюю оценку ненадежности всей схемы.

1. Основные понятия и определения

Пусть $n \in N$, $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, а P_k – множество всех функций k -значной логики, т.е. функций $f(x_1, \dots, x_n) : (E_k)^n \rightarrow E_k$. Рассмотрим реализацию функций из P_k схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе B .

Будем считать, что схема из ненадежных элементов реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ ($\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$.

Предполагается, что все базисные элементы ненадежны, переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, а сами неисправности могут быть произвольными (например, инверсными или константными).

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, $\tilde{a}^n$ – произвольный входной набор схемы S , $f(\tilde{a}^n) = \tau$. Обозначим через $P_i(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления значения i на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$, а через $P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n)$ – вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ясно, что

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) = P_{\tau+1}(S, \tilde{a}^n) + P_{\tau+2}(S, \tilde{a}^n) + \dots + P_{\tau+k-1}(S, \tilde{a}^n).$$

Отметим, что в выражениях $\tau+1$, $\tau+2$, ..., $\tau+k-1$ сложение осуществляется по $\text{mod } k$.

Например, если входной набор $\tilde{a}^n$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}^n) = 0$, то вероятность ошибки на этом наборе равна

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq 0}(S, \tilde{a}^n) = P_1(S, \tilde{a}^n) + P_2(S, \tilde{a}^n) + \dots + P_{k-1}(S, \tilde{a}^n).$$

Ненадежностью схемы S будем называть число $P(S) = \max \{P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n)\}$, где максимум берется по всем входным наборам $\tilde{a}^n$ схемы S . Надежностью схемы S равна $1 - P(S)$.

2. О нижних оценках ненадежности схем

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная функция из P_k . Обозначим через E_f ($E_f \subseteq E_k$) множество значений функции f . Пусть S – схема, реализующая функцию f , причем в схеме S можно выделить подсхему D , которая имеет один вход и содержит выход схемы S . Поскольку D имеет один вход, очевидно, что она реализует функцию $\chi(y)$ одной переменной y . Пусть функция $\chi(y)$ принимает все k значений. Обозначим через C подсхему, получаемую из схемы S удалением подсхемы D . Пусть схема C реализует функцию $h(\tilde{x}^n)$.

О схеме C будем говорить, что она *надежнее* схемы S (и получается из схемы S удалением подсхемы D), если выполнено неравенство $P(C) < P(S)$.

Схему S , реализующую функцию f , будем называть *bc-схемой*, если из нее нельзя получить более надежную схему удалением подсхемы, реализующей функцию одной переменной.

Обозначим через w_σ ($\sigma \in E_k$) вероятность появления ошибки на выходе схемы D при поступлении на ее вход значения σ .

Справедлива теорема 1, которая обобщает ранее известные аналоги этой теоремы для $k=3$ и 4 [6, 7], причем не только на случай произвольного k , но и для произвольной функции $\chi(y)$, принимающей k значений (в работах [6, 7] $\chi(y) \equiv y$).

Теорема 1. Пусть схема S , ненадежность которой равна $P(S)$, реализует функцию f и является *bc-схемой*. Пусть в схеме S можно выделить подсхему D , имеющую один вход, содержащую выход схемы и реализующую функцию $\chi(y)$, принимающую все k значений, с ненадежностью $P(D)$ ($0 < P(D) < 1/2$). Тогда верно неравенство

$$\frac{\min \{w_\sigma\}}{2P(D)} \leq P(S),$$

где минимум берется по всем $\sigma \in E_k$.

Доказательство (от противного). Пусть для схемы S и реализуемой ею функции f выполнены условия теоремы. Без ограничения общности можно считать, что функция f зависит от n переменных $x_1, \dots, x_n$, т.е. $f = f(\tilde{x}^n)$.

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда при всех $\sigma \in E_k$

$$\frac{w_\sigma}{2P(D)} > P(S).$$

Поэтому верно неравенство

$$\frac{w_\sigma}{2P(D)} - w_\sigma = \frac{w_\sigma(1-2P(D))}{2P(D)} > P(S) - w_\sigma.$$

Следовательно,

$$\frac{w_\sigma}{2P(D)} > \frac{P(S) - w_\sigma}{1 - 2P(D)}. \quad (1)$$

Пусть $\tilde{a}^n$ – такой входной набор схемы S , что $h(\tilde{a}^n) = \sigma$ и $P_{h(\tilde{a}^n) \neq \sigma}(C, \tilde{a}^n) = P(C)$ ($\sigma \in E_h$). Обозначим через τ значение функции $f(\tilde{x}^n)$, т.е. $f(\tilde{a}^n) = \chi(h(\tilde{a}^n)) = \tau$. Найдем вероятность $P_\tau(S, \tilde{a}^n)$ появления τ на выходе схемы S :

$$\begin{aligned} P_\tau(S, \tilde{a}^n) &= P_\sigma(C, \tilde{a}^n)P_\tau(D, \sigma) + P_{\sigma+1}(C, \tilde{a}^n)P_\tau(D, \sigma+1) + \dots + \\ &\quad + P_{\sigma+k-1}(C, \tilde{a}^n)P_\tau(D, \sigma+k-1) = \\ &= P_\sigma(C, \tilde{a}^n)(1 - w_\tau) + \sum_{i=1}^{k-1} P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n)P_\tau(D, \sigma+i) = \\ &= \left[1 - \sum_{i=1}^{k-1} P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n) \right] (1 - w_\tau) + \sum_{i=1}^{k-1} \left[P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n)P_\tau(D, \sigma+i) \right] = \\ &= 1 - w_\tau + \sum_{i=1}^{k-1} \left[P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n)(w_\tau - 1 + P_\tau(D, \sigma+i)) \right]. \end{aligned}$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе схемы S равна

$$\begin{aligned} P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) &= w_\tau + \sum_{i=1}^{k-1} \left[P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n)(1 - w_\tau - P_\tau(D, \sigma+i)) \right] \geq \\ &\geq w_\tau + \sum_{i=1}^{k-1} \left[P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n)(1 - w_\tau - P(D)) \right] \geq w_\tau + (1 - 2P(D)) \sum_{i=1}^{k-1} \left[P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n) \right] \geq \\ &\geq w_\tau + (1 - P(D))P(C), \end{aligned}$$

т.е. верно неравенство

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) \geq w_\tau + P(C)(1 - 2P(D)). \quad (2)$$

Из соотношения (2) следует неравенство

$$\frac{P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) - w_\tau}{1 - 2P(D)} \geq P(C). \quad (3)$$

Учитывая (3) и (1), получаем неравенство

$$P(C) \leq \frac{P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) - w_\tau}{1 - 2P(D)} \leq \frac{P(S) - w_\tau}{1 - 2P(D)} < \frac{w_\tau}{2P(D)},$$

тогда

$$-2P(C)P(D) > -w_\tau. \quad (4)$$

Из неравенства (2), учитывая (4), следует

$$\begin{aligned} P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}) &\geq w_\tau + P(C)(1 - 2P(D)) = w_\tau + P(C) - 2P(C)P(D) > \\ &> w_\tau + P(C) - w_\tau = P(C). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство $P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) > P(C)$, из которого следует неравенство $P(S) > P(C)$, что противоречит условию.

Теорема 1 доказана.

Покажем, как можно использовать теорему 1 для доказательства нижней оценки ненадежности схем, например, в базисе Россера – Туркетта при $k = 4$.

3. Нижние оценки ненадежности схем в базисе Россера – Туркетта

Рассмотрим реализацию функций из множества P_4 схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе Россера – Туркетта $\{0, 1, 2, 3, J_0(x_1), J_1(x_1), J_2(x_1), J_3(x_1), \min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\}\}$ ($\min\{x_1, x_2\}$ будем также обозначать через $\&$, а $\max\{x_1, x_2\}$ – через $\vee$ [8, с. 46]).

Обозначим через $K_1(n)$ множество таких функций четырехзначной логики, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 3$), что каждая из этих функций принимает все четыре значения 0, 1, 2, 3 и не представима ни в виде $x_m \vee h(\tilde{x}^n)$, ни в виде $x_m \& h(\tilde{x}^n)$, ($m \in \{1, 2, \dots, n\}$ $h(\tilde{x}^n)$ – произвольная

функция четырехзначной логики). Пусть $K_1 = \bigcup_{n=3}^{\infty} K_1(n)$. Ранее доказаны

утверждение 1 и теорема 2.

$$\text{Утверждение 1 [7]. } |K_1(n)| \geq 4^{4^n} - 2n4^{3 \cdot 4^{n-1}} - 4 \cdot 3^{4^n}.$$

Теорема 2 [7]. Пусть функция $f \in K_1$. Тогда для любой схемы S , реализующей f , при $\varepsilon \in (0, 1/1000]$ верно неравенство

$$P(S) \geq 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3.$$

Покажем, что множество K_1 можно расширить.

Обозначим через $K(n)$ множество таких функций из $P_4(n)$, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 3$), что каждая из этих функций принимает не менее трех значений, среди которых 0 и 3, и не представима ни в виде $x_m \vee h(\tilde{x}^n)$, ни в виде $x_m \& h(\tilde{x}^n)$ ($m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $h(\tilde{x}^n)$ – произвольная функция четырехзначной логики). Пусть $K = \bigcup_{n=3}^{\infty} K(n)$.

Утверждение 2. $|K(n)| \geq 4^{4^n} - 2n4^{3 \cdot 4^{n-1}} - 2 \cdot 3^{4^n}$.

Доказательство такое же, как в утверждении 1, отличие лишь в заключительной части: оценим число функций, принимающих не меньше трех значений, среди которых 0 и 3. Для этого из всех 4^{4^n} функций удалим функции, принимающие только значения 0 и 3 (их 2^{4^n}), а также те функции, которые не принимают значение 0 или значение 3 (их $3^{4^n} + 3^{4^n} - 2^{4^n} = 2 \cdot 3^{4^n} - 2^{4^n}$).

Очевидно, что при всех $n \geq 3$ имеет место строгое включение: $K_1(n) \subset K(n)$, из которого следует класс $K(n)$, также как и класс $K_1(n)$ содержит почти все функции из $P_4(n)$.

Справедлива теорема 3 о нижней оценке ненадежности схем, реализующих функции из класса K .

Теорема 3. Пусть функция $f \in K$. Тогда для любой схемы S , реализующей f , при всех $\varepsilon \in (0, 1/1000]$ верно неравенство

$$P(S) \geq 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3.$$

Доказательство такое же, как в теореме 2 [7].

Из теоремы 3 следует, что любая схема, реализующая функцию $f \in K$, функционирует с ненадежностью, которая асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не меньше 9ε .

Вывод: вероятности ошибок некоторых подсхем определяют нижнюю оценку ненадежности всей схемы.

Список литературы

1. **Васин, А. В.** О базисах, в которых асимптотически оптимальные схемы функционируют с ненадежностью 5ε / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 64–79.
2. **Алехина, М. А.** О ненадежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 2012. – Т. 24, № 3. – С. 17–24.

3. **Alekhina, M. A.** Synthesis and complexity of asymptotically optimal circuits with unreliable gates / M. A. Alekhina // *Fundamenta Informaticae*. – 2010. – Vol. 104 (3). – P. 219–225.
4. **Грабовская, С. М.** О надежности неветвящихся программ с ненадежным оператором условной остановки в произвольном полном конечном базисе / С. М. Грабовская // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2011. – № 3. (19). – С. 52–60.
5. **Алехина, М. А.** Синтез схем из ненадежных элементов в P_k / М. А. Алехина // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2015. – № 3 (35). – С. 3–10.
6. **Алехина, М. А.** Оценки ненадежности схем в базисе Россера – Туркетта / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2014. – № 1 (29). – С. 5–19.
7. **Алехина, М. А.** Асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе Россера – Туркетта в P_4 / М. А. Алехина, С. П. Каргин // *Известия высших учебных заведений. Физико-математические науки*. – 2015. – № 1 (33). – С. 37–53.
8. **Яблонский, С. В.** Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Высшая школа, 2001. – 384 с.

References

1. Vasin A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2010, no. 1 (13), pp. 64–79.
2. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2012, vol. 24, no. 3, pp. 17–24.
3. Alekhina M. A. *Fundamenta Informaticae* [Fundamental informatics]. 2010, vol. 104 (3), pp. 219–225.
4. Grabovskaya S. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 3 (19), pp. 52–60.
5. Alekhina M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 3 (35), pp. 3–10.
6. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 1 (29), pp. 5–19.
7. Alekhina M. A., Kargin S. P. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 1 (33), pp. 37–53.
8. Yablonskiy S. V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku* [Introduction into discrete mathematics]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001, 384 p.

Алехина Марина Анатольевна

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующая кафедрой
дискретной математики, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: alekhina@pnzgu.ru

Alekhina Marina Anatol'evna

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of discrete mathematics, Penza State
University (40 Krasnaya street, Penza,
Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

О вероятностях ошибок в одной модели вычислений / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 12–19.